Μετρικοί Χώροι και η Τοπολογία τους - Φεβρουάριος 2025

Θέμα 1. [2 μον.]
Να ορίσετε σε ένα μετρικό χώρο τις ανοικτές και κλειστές μπάλες και να αποδείξετε ότι κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο ενώ κάθε κλειστή μπάλα είναι κλειστό σύνολο σε αυτόν.

Θέμα 2. [1.5 μον.]
Σε μετρικό χώρο (X, ρ), έστω $\emptyset \neq A \subseteq X$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $f\colon X \to \mathbb{R}$ με $f = \mathcal{X}_A$, όπου με $\mathcal{X}_A$ συμβολίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση στο A (δηλ. $\mathcal{X}_A(x) = 1,$ αν $x \in A$ και $\mathcal{X}_A(x) = 0,$ αν $x \in X \smallsetminus A$). Αν $x_0 \in X$ δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $x \notin \partial A$.

Θέμα 3. [1 μον.]
Ας είναι (X, ρ) μετρικός χώρος, $A, B \subseteq X$ με $A \neq X$, $B \neq \emptyset$ και $A^o = \overline{B}$. Να αποδείξετε ότι ο μετρικός χώρος (X, ρ) δεν είναι συνεκτικός.

Θέμα 4. [1 μον.]
Να βρεθούν δύο υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική τέτοια ώστε

$$A^o = B^o = (3, 5),\ \overline{A} = \overline{B} = [0, 7] \text{ και } A \cap B = (3, 5.)$$

Θέμα 5. [2 μον.]
Δίνονται δύο μετρικοί χώροι (X, ρ) και (Y, d) με τον (X, ρ) να είναι πλήρης. Έστω επίσης, μια συνεχής και επί συνάρτηση $f\colon X \to Y$ τέτοια ώστε

$$\rho(a, b) \leq d(f(a), f(b)),\ \forall\ a, b \in X.$$

Να αποδείξετε ότι ο μετρικός χώρος (Y, d) είναι πλήρης.

Θέμα 6. [2.5 μον.]

(i) Αν (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$ είναι συμπαγές, να δείξετε ότι το A είναι κλειστό σύνολο.

(ii) Ας είναι (X, ρ) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του X τέτοια ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό.

(Υπόδειξη: **Α΄ τρόπος-** δείξτε ότι το σύνολο είναι κλειστό αποδεικνύοντας το γενικότερο συμπέρασμα ότι είναι συμπαγές και χρησιμοποιήστε το ερώτημα (i) ή **Β΄ τρόπος:** δείξτε απευθείας ότι το σύνολο είναι κλειστό με χρήση του ορισμού του κλειστού συνόλου).